حالة الشبكة

لتكن $(L, \le)$ شبكة مزودة بقانوني التشكيل

العمليات $x \vee y$ و $x \wedge y$ وكل منهما يحقق الخاصية

الابدالية والتجميعية وهذين القانونين مع الخاصة الماصة

قانون الامتصاص الحالة التي تكون فيها علاقة الترتيب

هي المساواة) ولكنها يعرفان نفس علاقة

الترتيب ذلك أن

$$x \vee y = y \iff x \le y$$

$$x \wedge y = x \iff x \le y$$

وبالعكس اذا كانت L مزودة بقانوني تشكيل

والعمليات $x \top y$ و $x \perp y$ ويحققان الخواص

الابدالية والتجميعية فإن لاكل من

هذين القانونين يعرف علاقة ترتيب :

$(E, \leq_1) \Leftrightarrow x \top y = y \Leftrightarrow x \leq_1 y$

نصف شبكة عليا

$(E, \leq_2) \Leftrightarrow x \perp y = x \Leftrightarrow x \leq_2 y$

نصف شبكة دنيا

لكن في الحالة العامة لا تكون شبكتين عائدتين

العلاقتين يمكن أن تكونا مختلفتين

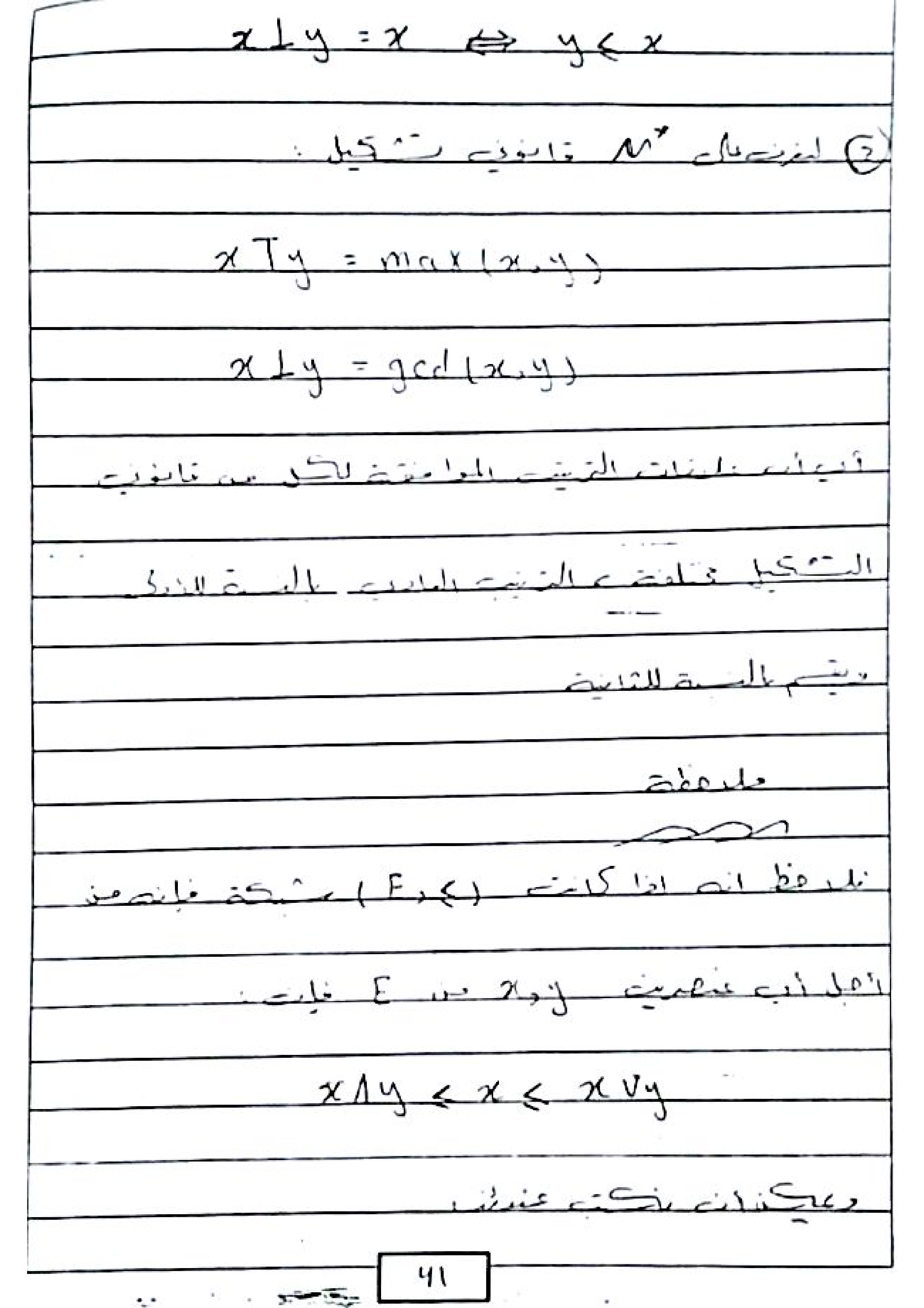
أمثلة

1) المثال الاكثر سهولة هو الأعداد في المرتبة

نفس القانون نحصل على علاقتي ترتيب عكس احداهما

عكس الأخرى.

$x \top y = y \Leftrightarrow x \leq y$



$x \perp y = x \iff y \leq x$

② لنزود $\mathbb{N}^*$ بقانوني تشكيل :

$x \top y = \max(x, y)$

$x \perp y = \gcd(x, y)$

أثبت أن علاقات الترتيب الموافقة لكل من قانوني

التشكيل تختلف عن الترتيب العادي بالنسبة للأول

ونفسه بالنسبة للثانية

ملاحظة

نلاحظ أنه اذا كانت $(E, \leq)$ مشبكة فإنه من

أجل أي عنصرين x, y من E فإن :

$x \wedge y \leq x \leq x \vee y$

ويمكننا أن نكتب عندئذ :

المادة : نظرية الشبكات **المحاضرة:** الرابعة رياضيات/ ...

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

تسمى بالامتصاص

وهاتين المساواتين تعرفان بقانوني الامتصاص

ملاحظة

الشبكة L مجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين

$x \vee y$ و $x \wedge y$ يحققان الآتي

1) كل من قانوني التشكيل يحقق الخواص الآتية

التبديلية والتجميعية

2) قانوني الامتصاص متحققين أي أنه من أجل أي عنصرين

x, y نجد

$$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$$

عندئذ يمكننا أن نعرف علاقة ترتيب جزئية في

حيث تكون المجموعة المرتبة $(E, \leq)$ شبكة

حيث:

$$\sup_E \{x, y\} = x \vee y$$

$$\inf_E \{x, y\} = x \wedge y$$

علاقة الترتيب معرفة بواسطة $x \vee y = y$

أو بواسطة $x \wedge y = x$ المتكافئات

البرهان

علمنا سابقاً يمكن برهان أن علاقتي

الترتيب:

$x \leq_1 y$ معرفة بواسطة $x \vee y = y$

$x \leq_2 y$ معرفة بواسطة $x \wedge y = x$ متكافئتين

1) نفرض أن $x \leq_1 y \iff x \vee y = y$

$x \leq_2 y \iff x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ $\Leftarrow$

2) نفرض أن $x \wedge y = x \iff x \leq_2 y$

$x \leq_1 y \iff x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ $\Leftarrow$

مبرهنة

اذا كانت $(L, \leq)$ شبكة فإن

1) نفرض أن $a \leq b$ $\Leftarrow$ من أجل أي x يكون

$a \wedge x \leq b \wedge x$

$a \vee x \leq b \vee x$

2) نفرض أن $a \leq b$, $c \leq d$ $\Leftarrow$

$a \wedge c \leq b \wedge d$

$a \vee c \leq b \vee d$

البرهان

1) نفرض $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$, $a \vee b = b$

$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x)$

$= (a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$

$\Rightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$

$(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x)$

$= (a \vee b) \vee x = b \vee x$

$\Rightarrow a \vee x \leq b \vee x$

2) لنفرض ان $a \leq b$, $c \leq d$ $\overset{\text{من (1)}}{\Longleftarrow}$ يكون

$a \wedge c \leq b \wedge c$ $\quad$ $b \wedge c \leq b \wedge d$

$a \vee c \leq b \vee c$ $\quad$ $b \vee c \leq b \vee d$



$a \wedge c \leq b \wedge c$ و $b \wedge c \leq b \wedge d \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d$

$a \vee c \leq b \vee c$ و $b \vee c \leq b \vee d \Rightarrow a \vee c \leq b \vee d$

الشبكات الجزئية والمورفيزمات

تعريف الشبكة العليا الجزئية

لتكن $(E, \leq)$ شبكة عليا وبالتالي فكل

مجموعة جزئية مثل $\{x, y\}$ تملك حد أعلى أصغري في E

هو $x \vee y$ ، لتكن A مجموعة جزئية من E والتي لها

عليها الترتيب المحدد من E ولتكن $\{x, y\} \subseteq A$ ،

فيكون لدينا ثلاثة احتمالات :

1) $\sup_A \{x, y\}$ موجود ويساوي $x \vee y$

2) $\sup_A \{x, y\}$ موجود ومختلف عن $x \vee y$

3) $\sup_A \{x, y\}$ غير موجود.

أمثلة

لتكن نعرف الشبكة العليا $(\mathbb{N}, |)$ والمجموعة

$A = \{2, 3, 6, 7, 9, 42\}$ والممثلة بالشكل

1) $\sup_A \{2,3\} = 6 = 2 \vee 3$

2) $\sup_A \{3,7\} = 42 \neq 3 \vee 7 = 21$

3) $\{7,9\}$ لا تمتلك حد أعلى أصغر في A

ملاحظة

يوجد تكافؤ بين:

1) $\sup_A \{x,y\}$ موجود ويساوي $x \vee y$

2) $x \vee y \in A$

البرهان

2 ⇐ 1) واضح

1 ⇐ 2) اذا كانت $x \vee y \in A$ فان $x \vee y$ يكون

هو اصغر حد اعلى للمجموعة $\{x, y\}$ في A وهو المطلوب

تعريف

نسمي المجموعة الجزئية غير الخالية A من نصف الشبكة العليا E

نصف شبكة عليا جزئية اذا تحقق احد الشرطين التاليين

المتكافئين:

1) $sup_A\{x, y\}$ موجود ويساوي $x \vee y$ من اجل

عنصرين x, y من A

2) $x \vee y \in A$ من اجل اي عنصرين x, y من A

ملاحظات

1- في كل الشرايح يجب الانتباه إلى ان نضع بكتب المعطيات $x \wedge y$

2- في A مفي المثال الا اتقدم نلاحظ أن A ليست نصف شبكة

عليا جزئية لكن الزمر لأن $2 \vee 3 \in A$

3- من الممكن ان لا تكون A نصف شبكة عليا جزئية ولكنها

نصف شبكة عليا من أجل الترتيب المحدد

مثال

في نصف الشبكة العليا $(\mathbb{N}^*, |)$ المجموعة $A = \{1, 3, 4, 24\}$

ليست نصف شبكة عليا جزئية من الملاحظة أن $3 \vee 4 = 12 \notin A$ بالرغم

من أن A هي نصف شبكة عليا من الملاحظة كل زوج من عناصرها

يملك حد أعلى أصغري في A فمثلاً :

$$sup_A \{3, 4\} = 24$$

نصف الشبكة الدنيا الجزئية

من أجل نصف الشبكة الدنيا $(E, \leq)$ وبشكل مماثل لما سبق، اذا كانت $A \subseteq E$ مزودة بعلاقة الترتيب المارة لها A واذا كانت $\{x, y\} \subseteq A$ فلدينا ثلاث احتمالات ممكنة :

1) $inf_A\{x,y\}$ موجود ويساوي $x \wedge y$

2) $inf_A\{x,y\}$ موجود ويختلف عن $x \wedge y$

3) $inf_A\{x,y\}$ غير موجود

الحالة (1) تكافئ $x \wedge y \in A$

تعريف

نسمي المجموعة الجزئية غير الخالية A من نصف الشبكة الدنيا E نصف شبكة دنيا جزئية اذا حققت أحد الشرطين التاليين المتكافئين :

1) $inf_A\{x,y\}$ موجود ويساوي $x \wedge y$ وذلك من أجل

لأي عنصرين x,y من A

12) $x \wedge y \in A$ من أجل أي عنصرين x,y من A

أي أن A تكون نصف شبكة دنيا مع مقصور العملية $\wedge$ على A

الشبكات الجزئية

تعريف

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الشبكة $(L,\vee,\wedge,\leq)$ شبكة جزئية إذا كانت نصف شبكة عليا جزئية ونصف شبكة دنيا جزئية وهذا يعني أنه من أجل أي عنصرين x,y من A يكون:

$$x \wedge y \in A \quad \text{و} \quad x \vee y \in A$$

وتكون A شبكة جزئية إن:

$$\sup_A \{x,y\} = x \vee y$$

$\inf_A \{x,y\} = x \wedge y$

أمثلة على الشبكات الجزئية

1) مثال: نستذكر أن المجموعة $(|, N^*)$ شبكة وليكن n

عدد صحيح موجب مختلف عن الصفر ولنرمز بـ $D(n)$ لمجموعة قواسم

n عندئذ $D(n)$ تكون شبكة جزئية من N^*

كان x/n و y/n عندئذ

$gcd(x,y)/n$ $Lcm(x,y)/n$

12, 4, 6, 2, 3, 1 — $D(12)$

6, 2, 3, 1 — $D(6)$

2, 1 — $D(2)$

2) المجموعات المفتوحة والمغلقة في فضاء طبولوجي:

ليكن E فضاء طبولوجي فإن $(P(E), \subseteq)$ تشكل شبكة

ملاحظة:

- أسرة المجموعات المفتوحة في E تكون شبكة جزئية من الشبكة $(P(E), \subseteq)$

- أسرة المجموعات المغلقة في E تكون شبكة جزئية من الشبكة $(P(E), \subseteq)$

انتهت المحاضرة